Newmark β-Yöntemi

Barış Erkuş

Dr. Öğr. Üye., İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi

bariserkus@itu.edu.tr

Özet

Bu metinde, Newmark β-yöntemi tek serbestlik dereceli sistemlerin analizi için kısaca açıklanmıştır. Harmonik yükleme ve yer hareketi için örnekler çözülmüştür.

1 Giriş

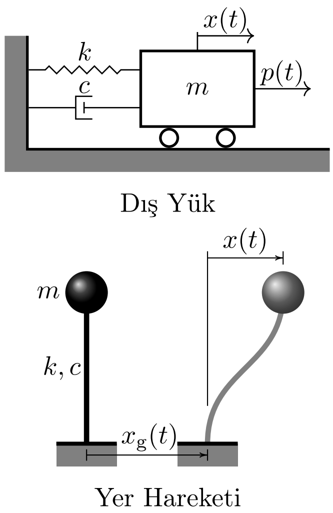
Tek serbestlik dereceli sistemlerin (TSDS, Şekil 1) hareket denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \quad (1)$$

Eğer dış kuvvet yerine bir yer hareketi $\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$ var ise denklem şu hali alır:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t) \quad (2)$$

Burada $x(t)$, $\dot{x}(t)$ ve $\ddot{x}(t)$ sırası ile mesnede göre yerdeğiştirme, hız ve ivme; m, c ve k sırası ile kütle, sönüm katsayısı ve yay katsayısıdır.



Şekil 1: Tek serbestlik dereceli sistemler

Sayısal analiz yöntemlerinde, sistem cevaplarının sürekli fonksiyonları yerine, bu fonksiyonların verilen zaman anlarındaki değerleri bulunur. Bu zaman anları genelde bir zaman aralığı kullanılarak tanımlanır: 0, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, ... Bazen bu anlar bir indis ile de tanımlanmaktadır: 0, 1, 2, ..., $t-1$, t, $t+1$, ... (örnek: x_0, $\dot{x}_t$, $\ddot{x}_{t+1}$)

Sayısal yöntemlerde genelde ilk önce ivme, hız ve yerdeğiştirmeyi sadece bir tür cevap türünden yaklaşık olarak ifade edilir (örnek: ivme ve hızı yerdeğiştirme türünden). Sonra hareket denklemini bu bilinmeyen üzerinden tanımlanır ve t anı değerleri bilindiğinden bir sonraki adım $(t+1)$ için çözüm ya da hesap yapılır. Bundan dolayı bu yöntemler artımsal (İng. incremental) ya da zaman-adımsal (time-stepping) olarak da tanımlanır.

Sayısal yöntemlerin bazılarında, t anındaki sistem tepkileri $t+1$ anındaki tepkilere bağlı olabilir. Bu durumda hareket denkleminin $t+1$ anındaki dengesinin sağlanması üzerine hesaplar yapılır. Bu andaki cevaplar denklemde bilinmeyen olarak ifade edilir ve hareket denkleminin çözümü için mutlaka yay sabitinin tersi alınarak hesap yapılması gerekir. Yay sabitinin tersi alınması gereken bu tip yöntemler kapalı/örtük (implicit) yöntem olarak adlandırılır. Her ne kadar TSDS'de bu işlem yük ve vakit anlamında sorun yaratmayacak olsa da, büyük ölçekli çok serbestlik dereceli sistemlerde (ÇSDS'de) her adımda rijitlik matrisinin tersi alınması gerekir ki, bu operasyon, sayısal çözümlerde işlemsel olarak en fazla vakit alan ve en hassas olan operasyondur.

Diğer tür sayısal yöntemlerde, $t+1$ anındaki tepkiler, t ve $t-1$ anlarında bilinen tepkiler cinsinden yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu tür yöntemler açık/belirtik (explicit) olarak adlandırılır. Bu durumda hareket denkleminin $t+1$ anındaki dengesinin sağlanması ile ilgili bir hesap yapılmaz ancak istenirse bazı kontroller (örnek: enerji dengesi) yapılabilir. Açık yöntemlerde yay sabitinin ya da rijitlik matrisinin tersinin alınmasına gerek yoktur, ancak bazı yöntemlerde kütle ve sönümleme matrislerinin tersi alınması gerekebilir.

2 Tepkilerin Taylor Dizisi Açılımı

Newmark β-yönteminde yerdeğiştirme ve hız fonksiyonlarının Taylor dizisi açılımı kullanılmaktadır. Verilen reel ve tüm türevleri alınabilen bir fonksiyonun $f(x)$, verilen bir x değeri $x=a$ etrafındaki Taylor dizi açılımı şu şekildedir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{3}$$

Taylor dizisi açılımı, tek serbestlik dereceli bir sistemin yerdeğiştirme fonksiyonunun artımsal ifadesi için kullanılabilir:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\dddot{x}(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \cdots \tag{4}$$

Benzer şekilde hız fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \dot{v}(t)\Delta t + \frac{\ddot{v}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\dddot{v}(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \cdots \tag{5}$$

veya

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{\dddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\ddddot{x}(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \cdots \tag{6}$$

3 Newmark β-Yöntemindeki Yaklaşım

Newmark yönteminde dördüncü ve üstü türevli terimler ihmal edilmektedir:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^3 && (7) \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^2 && (8) \end{aligned}$$

Yöntemde üçüncü türevli terimin yerdeğiştirme ve hıza olan katkıları sırası ile $0 < \beta < 1$ ve $0 < \gamma < 1$ katsayıları ile ayarlanabilmektedir:

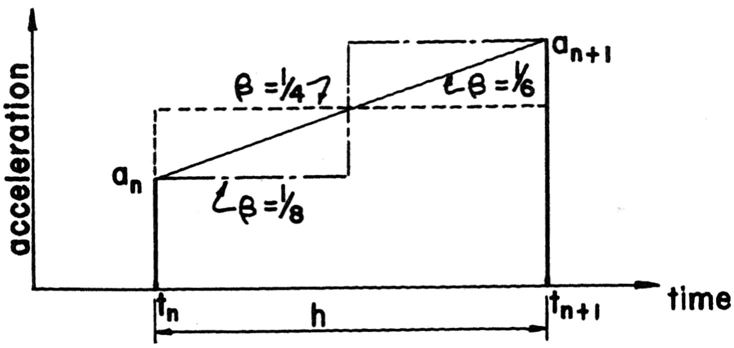
$$\frac{1}{3!}\dddot{x}(t) \rightarrow \beta\dddot{x}(t) \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{2!}\dddot{x}(t) \rightarrow \gamma\dddot{x}(t) \tag{9}$$

Görüldüğü üzere, $\beta = 1/3!$ ve $\gamma = 1/2!$ durumunda, yerdeğiştirme ve hız fonksiyonları Taylor dizisi açılımın yaklaşık haline denk gelmektedir. Denklem (9)'a ek olarak, üçüncü türev de yaklaşık olarak ifade edilmektedir:

$$\dddot{x}_{\mathrm{y}}(t) = \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t} \tag{10}$$

Burada üçüncü türevin ifadesinde ivmenin doğrusal olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda yerdeğiştirme ve hız şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \beta\dddot{x}_{\mathrm{y}}(t)(\Delta t)^3 && (11) \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \gamma\dddot{x}_{\mathrm{y}}(t)(\Delta t)^2 && (12) \end{aligned}$$



Şekil 2: β'nın değişimine göre ivme kabulleri ($h = \Delta t$, Newmark 1959'den alınmıştır)

Üçüncü türevin yaklaşık ifadesi bu denklemlerde yerine konulunca şu ifadeler elde edilmektedir:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{3!}(\Delta t)^2 \quad (13)$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t) \quad (14)$$

Bu ifadeler sadeleştirildiğinde şu denklemler elde edilmektedir:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + (\frac{1}{2} - \beta)\ddot{x}(t)(\Delta t)^2 + \beta\ddot{x}(t+\Delta t)(\Delta t)^2 \quad (15)$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + (1-\gamma)\ddot{x}(t)\Delta t + \gamma\ddot{x}(t+\Delta t)(\Delta t) \quad (16)$$

Denklemlerdeki notasyonlar ayrıca şu şekilde sadeleştirilebilir:

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\ddot{x}_{t+1} \quad (17)$$

$$\dot{x}_{t+1} = \dot{x}_t + (1-\gamma)\Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\ddot{x}_{t+1} \quad (18)$$

Burada $\square_t$ ve $\square_{t+1}$ sırası ile t ve $t+\Delta t$ anlarındaki (ya da t_n ve t_{n+1}) değerleri ifade etmektedir. Görüldüğü üzere bu yöntemde, t anı değerleri bilindiğinden, bilinmeyenler $t+1$ anındaki ivmeler $\ddot{x}_{t+1}$ türünden ifade edilmiştir.

4 Özel Haller

Newmark yönteminde $\gamma = 1/2$ seçilirse, β değeri ivmenin t ve $t+\Delta t$ anları arasındaki değişimi ile ilgili bazı kabullere denk gelmektedir. Aşağıda açıklanacağı üzere, $\beta = 1/4$ olması durumu ortalama ivme, $\beta = 1/6$ olması durumu ise doğrusal ivmeye denk gelmektedir. Bu iki durum uygulamada çok kullanıldığından ayrıca incelenmiştir.

4.1 Ortalama İvme Kabulü

İvmenin t ve $t+\Delta t$ anları arasındaki değişiminin sabit bir değer ve bu değerinde bu iki andaki ivmelerin ortalaması olduğu kabul edilirse, bu aralık için ivme fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t}{2} \quad (19)$$

Bu durumda hız ve yerdeğiştirme, ivmenin integralini alarak bulunabilir:

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_t + \frac{1}{2}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau \tag{20}$$

$$x(\tau) = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{4}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^2 \tag{21}$$

Formülasyonda hız ve yerdeğiştirme fonksiyonlarının $t+1$ anındaki değerleri kullanıldığından bu fonksiyonların $t+1$ anındaki değerleri, bir başka deyişle $\tau = \Delta t$ değeri için hesaplanmalıdır:

$$\dot{x}_{t+1} = \dot{x}_t + \frac{1}{2}\Delta t\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right) \tag{22}$$

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{4}(\Delta t)^2\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right) \tag{23}$$

Görüldüğü üzere, bu değerler, Denklemler 17 ve 18'de $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ kullanılması durumunda da elde edilmektedir.

4.2 Doğrusal İvme Kabulü

İvmenin t ve $t + \Delta t$ anları arasındaki değişiminin doğrusal olarak değiştiği kabul edilirse, bu aralık için ivme fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_{t+1} + \frac{\ddot{x}_{t+1} - \ddot{x}_t}{\Delta t}\tau \tag{24}$$

Bu durumda hız ve yerdeğiştirme, ivmenin integralini alarak bulunabilir:

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \frac{1}{2\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^2 \tag{25}$$

$$x(\tau) = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \frac{1}{6\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^3 \tag{26}$$

Formülasyonda hız ve yerdeğiştirme fonksiyonlarının $t+1$ anındaki değerleri kullanıldığından bu fonksiyonların $t+1$ anındaki değerleri, bir başka deyişle $\tau = \Delta t$ değeri için hesaplanmalıdır:

$$\dot{x}_{t+1} = \dot{x}_t + \frac{1}{2}\Delta t\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right) \tag{27}$$

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{6}(\Delta t)^2\left(\ddot{x}_{t+1} + 2\ddot{x}_t\right) \tag{28}$$

Görüldüğü üzere, bu değerler, Denklemler 17 ve 18'de $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/6$ kullanılması durumunda da elde edilmektedir.

4.3 $\gamma \neq 1/2$ Durumu

Bu durumda, Denklem 8'deki hız fonksionu asıl Taylor dizisi açılımına denk gelen değişkenden farklı olacaktır. Örnek olarak $\gamma > 1/2$ olması durumunda hız fonksiyonunun sanki bir sönümleme varmış gibi hesaplanacağı görülmektedir. Bu ek hayali sönümleme etkisini yaratmamak için $\gamma = 1/2$ değerinin kullanılması önerilmektedir (Newmark 1959).

5 Hareket Denkleminin Çözümü

Newmark yönteminde Denklemler (17) ve (18), hareket denklemine konursa, denklem bilinmeyeninin $t+1$ anındaki ivme olduğu hale gelir. Bu ivme bulunduktan sonra, $t+1$ anındaki yerdeğiştirme ve hızlar Denklemler (17) ve (18) ile edilebilir. Bu değerler ile $t+2$ anındaki değerler benzer yöntem ile elde edilebilir.

Açıklanan bu yöntemde rijitlik sabitinin tersi alındığından yöntem kapalı (implicit) bir yöntemdir. Ancak, dikkat edilirse, eğer $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ alınırsa, $t+1$ anındaki yerdeğiştirme ve hız $t+1$ anındaki ivmeden bağımsız olur. Hareket denkleminin çözümünde rijitlik matrisinin tersi yerine kütle matrisinin tersi alınır. Bu durumda yöntem açık (explicit) bir yöntem olur.

Doğrusal olmayan yapıların analizinde yöntemin başka bir artımsal hali kullanılmaktadır. Bir sonraki bölümde bu artımsal yaklaşım doğrusal analizler için verilmiştir.

6 Newmark β-Yönteminin Artımsal Formülasyonu

Hareket denkleminin $t+1$ anı için yazılacak hali, t anındaki denklemden çıkarılırsa, denklemin artımsal hali elde edilir:

$$m\Delta\ddot{x}^t + c\Delta\dot{x}^t + k\Delta x^t = \Delta p^t \tag{29}$$

Burada $\Delta\square^t = \square_{t+1} - \square_t$ değişkenlerin artımsal halini ifade etmektedir. Deprem durumu (yer ivmesi) için dış kuvvetler:

$$\begin{aligned} p^t &= p(t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t) & (30)\\ p^{t+1} &= p(t+\Delta t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t+\Delta t) & (31) \end{aligned}$$

Bu formülasyonun kullanımı için t anındaki değerler bilinmeli ve cevapların $\Delta\square^t$ değerleri hesaplanarak bir sonraki adımdaki değerleri bulunmalıdır. Bundan dolayı Denklemler 17 ve 18 t anı değerleri ve $\Delta\square^t$ değerleri cinsinden tekrar yazılmıştır:

$$\begin{aligned} x_{t+1} - x_t &= \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2(\ddot{x}_t + \Delta\ddot{x}^t)\\ \Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t\\ \Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + [\frac{1}{2}(\Delta t)^2 - \beta(\Delta t)^2 + \beta(\Delta t)^2]\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t\\ \Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t & (32)\\ \Delta\dot{x}^t &= \Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\Delta\ddot{x}^t & (33) \end{aligned}$$

Bu noktadan sonra bu denklemler, hareket denklemi 29'ne konulup $\Delta\ddot{x}^t$ için çözülebilir. Ancak, özellikle doğrusal olmayan analiz yöntemlerine uyumlu olması açısından bilinmeyenin Δx^t olduğu bir formülasyon daha uygun olmaktadır. Bundan dolayı Denklemler 32 ve 33, Δx^t değerinin bilinmeyen olduğu hali ile tekrar yazılmalıdır. Bunun için Denklem 32'den $\Delta\ddot{x}^t$ çekilir:

$$\Delta\ddot{x}^t = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t \tag{34}$$

ve Denklem 33'de yerine konur:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}^t &= \Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t\right)\\ \Delta\dot{x}^t &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta x^t - \frac{\gamma}{\beta}\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_t & (35) \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere hız ve ivme denklemleri bilinmeyen Δx^t cinsinden yazılmıştır. Bu değerler hareket denklemi 29'ne konursa hareket denkleminin cebirsel hali elde edilir:

$$\tilde{k}\Delta x^t = \Delta\tilde{p}^t \tag{36}$$

Burada

$$\tilde{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \tag{37}$$

$$\Delta\tilde{p}^t = \Delta p^t + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{x}_t + \left[\frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{x}_t \tag{38}$$

Yöntemin başında ($t = 0$ sn anı) hız ve yerdeğiştirme sıfır değilse, verilen değerlerden ivme şu şekilde hesaplanabilir ve ilk değer olarak kullanılabilir:

$$\ddot{x}^0 = \frac{p^0 - c\dot{x}^0 - kx^0}{m} \tag{39}$$

7 Özet

Bu bölümde Newmark yönteminin son hali denklemler tekrarlanarak verilmiştir.

1. Yöntem β ve γ seçimi ile başlamaktadır. Ortalama ivme kabulü için $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$, doğrusal ivme kabulü için $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/6$ kullanılmalıdır.

2. $t = 0$ sn anında hız ve yerdeğiştirme sıfırdan farklı ise, ivme şu şekilde hesaplanabilir:

$$\ddot{x}^0 = \frac{p^0 - c\dot{x}^0 - kx^0}{m}$$

3. Doğrusal sistemlerde $\tilde{k}$ sabittir ve ilk başta hesaplanıp tüm adımlarda kullanılabilir:

$$\tilde{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m$$

4. Herhangi bir t anında x^t, $\dot{x}^t$ ve $\ddot{x}^t$ değerleri bilinmektedir. Aynı zamanda etkiyen kuvvet ya da yer ivme bilgisi mevcut olduğunda dolayı p^t ve p^{t+1} değerleri de bilinmektedir. Bu değerler yer ivmesinin etkimesi durumunda şu şekildedir:

$$\begin{aligned} p^t &= p(t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t) \\ p^{t+1} &= p(t+\Delta t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t+\Delta t) \end{aligned}$$

5. p^t ve p^{t+1} değerleri kullanılarak Δp^t ve Δp^t değeri kullanılarakta $\Delta\tilde{p}^t$ değerleri hesaplanabilir:

$$\Delta\tilde{p}^t = \Delta p^t + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{x}_t + \left[\frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{x}_t$$

6. Hareket denkleminin cebirsel hali Δx^t için çözülebilir:

$$\tilde{k}\Delta x^t = \Delta\tilde{p}^t \qquad \Delta x^t = \frac{\Delta\tilde{p}^t}{\tilde{k}}$$

7. Artımsal hız ve ivme değerleri şu şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{x}^t &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t \\ \Delta\dot{x}^t &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta x^t - \frac{\gamma}{\beta}\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_t \end{aligned}$$

8. $t+1$ anındaki cevaplar şu şekilde bulunabilir:

$$x^{t+1} = x^t + \Delta x^t \qquad \dot{x}^{t+1} = \dot{x}^t + \Delta \dot{x}^t \qquad \ddot{x}^{t+1} = \ddot{x}^t + \Delta \ddot{x}^t$$

8 Kararlılık

Newmark yöntemi şu şart sağlanır ise kararlı olmaktadır:

$$\frac{\Delta t}{T_\mathrm{n}} \leq \frac{1/\pi}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}}$$

Burada T_n sistemin doğal salınım periyodudur. $\gamma = 1/2$ olması durumunda:

$$\frac{\Delta t}{T_\mathrm{n}} \leq \frac{1/\pi}{\sqrt{1 - 4\beta}}$$

Görüldüğü üzere, ortalama ivme durumunda $\beta = 1/4$, bu kriter

$$\frac{\Delta t}{T_\mathrm{n}} \leq \infty$$

olmaktadır. Bundan dolayı ortalama ivme kabulü her durumda kararlıdır. Doğrusal ivme durumunda $\beta = 1/6$,

$$\Delta t \leq 0.551 T_\mathrm{n}$$

olmaktadır. İnşaat mühendisliğinde yapı periyotlarının 0.1 sn-10 sn aralığında olduğu düşünülürse, $\Delta t \leq 0.05$ sn olması önerilebilir. Deprem kayıtları genelde en fazla $\Delta t = 0.02$ sn kullanmaktadır. Diğer tip analizlerde ise Δt genelde $\Delta t \leq 0.05$ sn şartını sağlayacak şekilde seçilebilir.

9 Örnek: Harmonik Yükleme

TSDS'e harmonik yükleme yapılması durumunda hareket denklemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Psin(\bar{\omega}t) \tag{40}$$

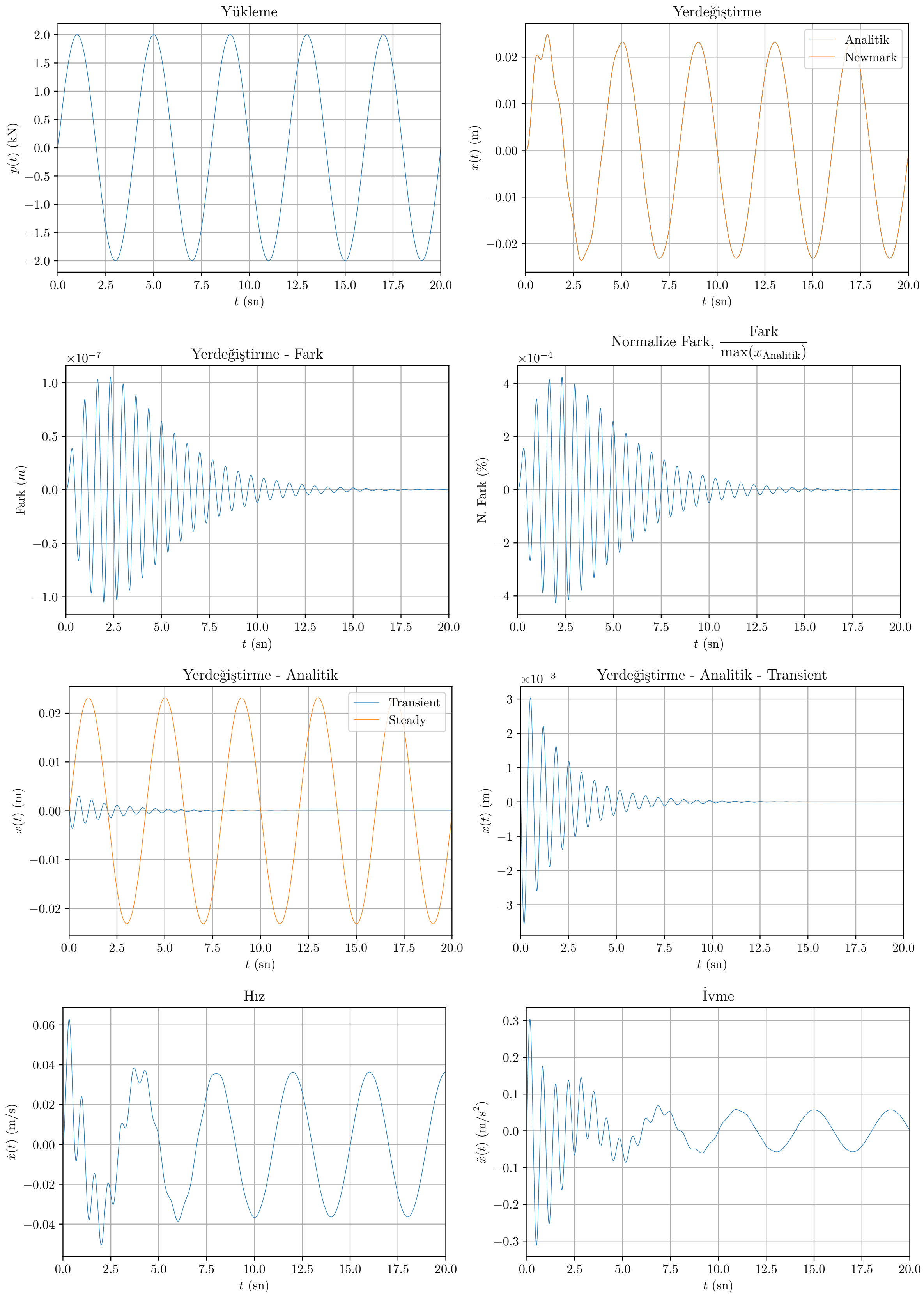
Burada P yükleme genliği, $\bar{\omega}$ ise yükleme frekansıdır. Bu sistemin yerdeğiştirmesi şu şekilde verilmiştir:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega_\mathrm{D} t + B\sin\omega_\mathrm{D} t) + \frac{x_\mathrm{st}\sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

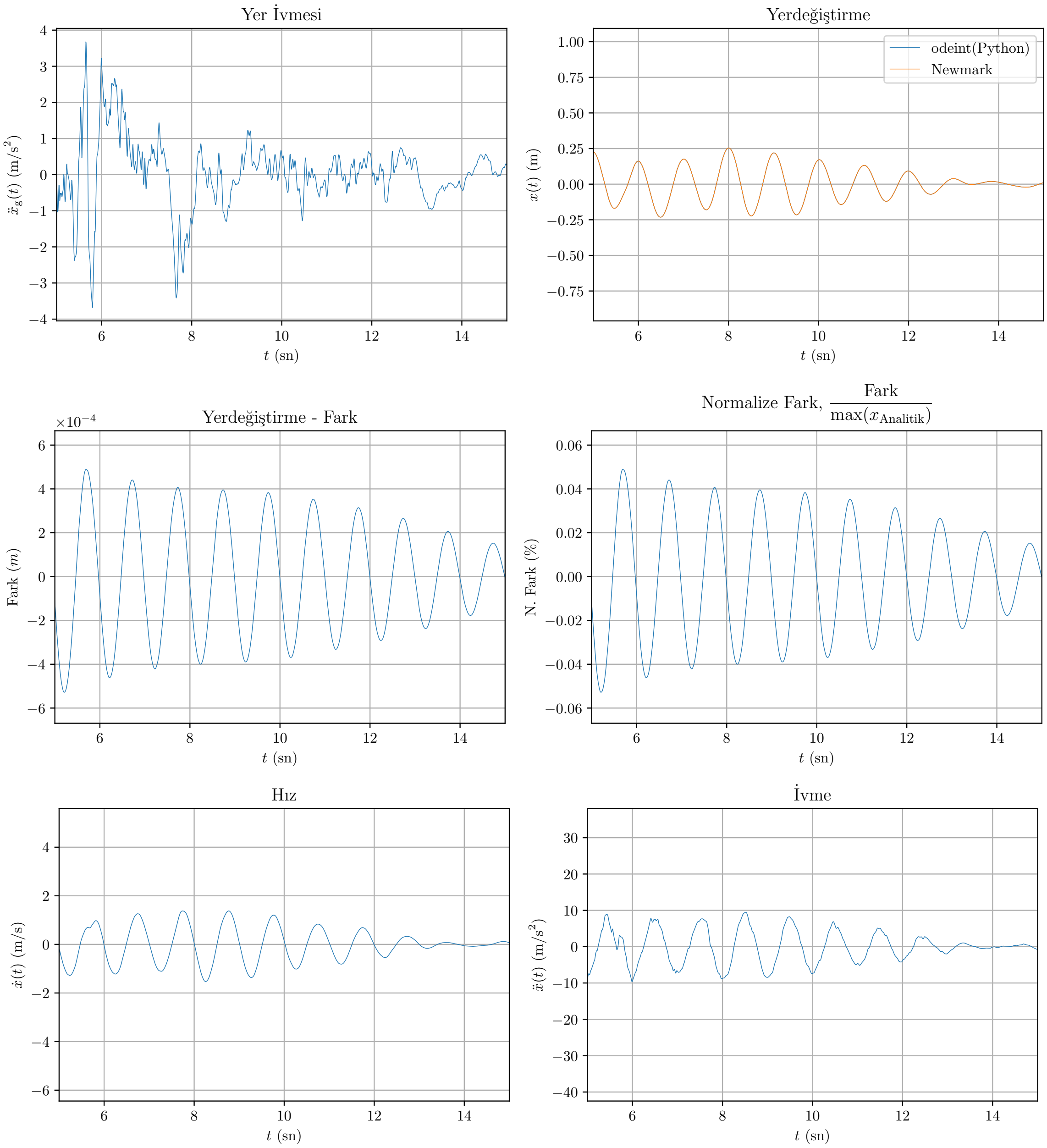
Burada $r = \bar{\omega}/\omega$, $\omega_\mathrm{D} = \omega_\mathrm{n}\sqrt{1-\xi^2}$ ve A ve B $t = 0$ sn anındaki değerlere bağlı olarak belirlenen sabitlerdir. $t = 0$ anında, tüm cevapların sıfır olduğu kabul edilebilir. Örnek olarak $A = 2$, $\bar{\omega} = \pi/2$, $\omega_\mathrm{n} = 2\pi$ ve $\xi = \%5$ seçilmiştir. Sistem cevapları Şekil 3'de gösterilmiştir.

10 Örnek: Yer İvmesi

TSDS'in yer hareketi altındaki davranışına örnek olarak 1979 Imperial Valley depreminin 952 nolu kayıt istasyonuna ait faya dik yer ivme kaydı kullanılarak analiz yapılmış ve 5-15 saniyeler arasındaki sonuçlar Şekil 4'de gösterilmiştir. Bu analizlerde $\omega_\mathrm{n} = 2\pi$, $\xi = \%5$, $\beta = 1/4$ ve $\gamma = 1/2$'dir.



Şekil 3: Harmonik yükleme altında örnek TSDS cevapları



Şekil 4: Harmonik yükleme altında örnek TSDS cevapları

Kaynaklar

Newmark, N. M. (1959). "A Method of Computation for Structural Dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **85** (3), **pages** 67–94.